Modélisation des instabilités d'interface de grandes longueurs d'onde dans l'écoulement d'un film mince d'un fluide visqueux faiblement élastique

N. AMATOUSSE[a], N. MEHIDI[a], H. AIT ABDERRAHMANE[b]

a. Laboratoire de Physique Théorique, Université A. Mira de Béjaia, Algérie
b. Physical Mathematics laboratory, King Abdullah University of Science and Technology, Arabie Saoudite

Résumé :

La complexité des équations de Navier-Stokes complètes rend rédhibitoire tout effort de modélisation, si bien que l'on a très tôt cherché à élaborer des modèles simples qui sont des approximations satisfaisantes de ces équations dans certaines géométries d'écoulement.

Dans le cas de l'écoulement de films minces sur des parois solides, les principaux modèles de la littérature présentent des insuffisances quelque peu restrictives. Nous avons l'exemple du développement asymptotique de Benney [1] qui n'est valable qu'à des nombres de Reynolds faibles et les méthodes "intégrales de couche limite" qui utilisent une fonction poids uniforme sur l'épaisseur du film et qui bien que présentant des résultats très réalistes pour des nombres de Reynolds modérés ne prédisent pas correctement le seuil de l'instabilité.

Notre modèle est une généralisation -au cas de l'écoulement de fluides visqueux faiblement élastiques - du modèle de fluide newtonien élaboré par Ruyer-Quil et Manneville [2]. Le principe de la modélisation repose sur la description du profil de l'écoulement par une méthode aux résidus pondérés, les fonctions tests utilisées généralisant celles décrivant l'écoulement de base. Cette théorie valable aussi bien au voisinage que loin du seuil de l'instabilité est au fait une amélioration de l'approche "intégrale de couche limite" de Shkadov [3].

Le modèle du second ordre élaboré est un système fermé de deux équations couplées où les seules inconnues sont l'épaisseur h du film et le débit local q :

$$q_x + h_t = 0$$

$$\frac{q}{h^2} - h + \varepsilon\left(\frac{2}{5}Rq_t + \frac{111}{280}\frac{Rqq_x}{h} - \frac{23}{40}\frac{Rqh_t}{h} - \frac{18}{35}\frac{Rq^2h_x}{h} + hh_x cot\theta\right) - \frac{1}{3}\varepsilon^3 RWh_{xxx} + \varepsilon^2\left(\frac{9}{5}\frac{h_xq_x}{h} - \frac{8}{5}\frac{h_x^2q}{h^2} + \frac{12}{5}\frac{h_{xx}q}{h} - \frac{9}{5}q_{xx}\right) + \varepsilon\Gamma R\left(\frac{23}{40}\frac{qh_t}{h^3} - \frac{q_t}{h^2} - \frac{9}{2}\frac{qq_x}{h^3} + 6\frac{h_xq^2}{h^4}\right) = 0$$

R étant le nombre de Reynolds, W le nombre de Weber, Γ le paramètre viscoélastique et θ l'angle d'inclinaison de la paroi sur laquelle le fluide s'écoule. Le paramètre ε rend compte ici du caractère "ondes longues" des modes instables.

Pour être validé, nous avons dans un premier temps confronté les résultats linéaires de notre modèle à ceux, exactes, issus de la résolution du problème aux valeurs propres généralisé d'Orr-Sommerfeld (OS). Notons le bon comportement de notre modèle (figure 1) comparé au développement asymptotique de Benney et au modèle intégral de Shkadov.

Le tracé du taux d'amplification de perturbations d'amplitude infinitésimale, pour différentes valeurs du paramètre viscoélastique (figure 2), confirme le fait que la viscoélasticité encouragerait le développement de perturbations quand l'écoulement est instable.

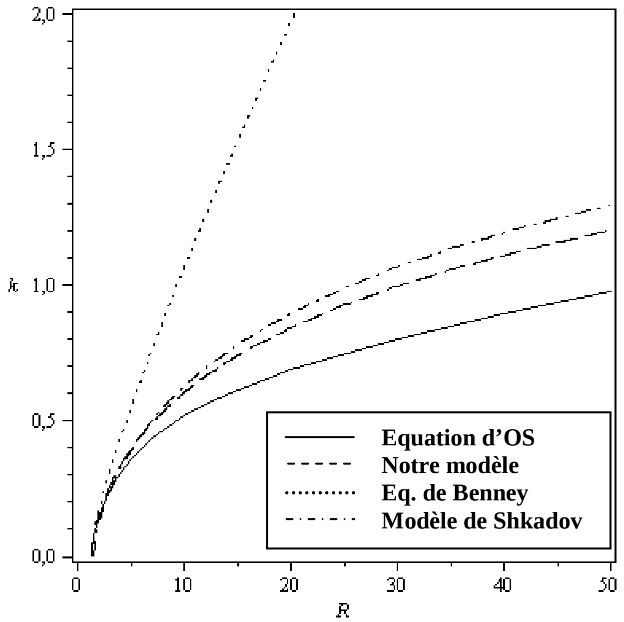

FIG. 1 – Courbe de stabilité marginale pour $\theta = 30°$, $\Gamma = 0.05$ et un nombre de Kapitza $Ka = 3^{-1/3} W R^{5/3} = 100$.

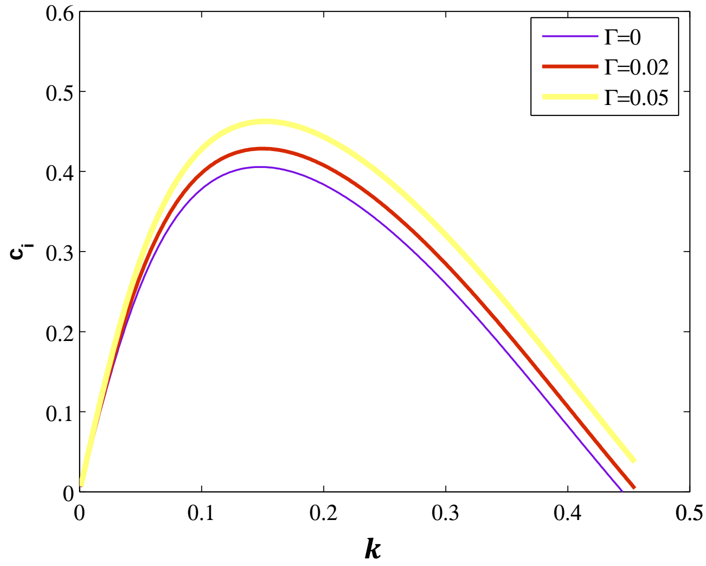

FIG. 2 – Taux d'amplification fonction du nombre d'onde k. Ici $\theta = 90^0$, $R = 5$ et $Ka = 100$.

Par ailleurs, près du seuil de l'instabilité, un développement aux petits nombres d'onde k de la célérité c des ondes nous a permis de déterminer le nombre de Reynolds critique R_c *(voir [5]) :*

$$R_c = \frac{5cot\theta}{6 + 15\Gamma}$$

Remarquons que la viscoélasticité a pour effet de déstabiliser l'écoulement.

Notons enfin que le modèle intégral de B. Uma and R. Usha [4] échoue à décrire les conditions critiques au début de l'instabilité puisqu'il prédit un nombre de Reynolds critique supérieur à celui que donne une étude asymptotique de l'équation d'Orr-Sommerfeld.

Abstract :

The weighted residual integral method is employed to investigate the flow of a thin layer of Walters-type B'' *viscoelastic fluid flowing down an inclined plane. A simplified second-order two-equation model is derived; the model is analogous to the simplified model proposed by Ruyer-Quil and Manneville [2] for Newtonian fluid. The normal mode analysis is used to investigate the linear stability of the Nusselt's flow and the correct critical condition for linear stability was found. The results of linear analysis indicate that the viscoelastic parameter,* Γ*, destabilizes the film flow as its magnitude increases.*

Mots clefs : **Fluides faiblement élastiques, Résidus pondérés, Instabilités.**

References

[1] Benney D.J., Long waves on liquid films, J. Math. Phys., 45, 150-155, 1966.
[2] Ruyer-Quil C., Manneville P., Improved modeling of flows down inclined planes, Eur. Phys. J. B, 15, 357-369 , 2000.
[3] Shkadov V.Y., Wave flow regimes of a thin layer of viscous fluid subject to gravity, Izv. Ak. Nauk. SSSR, Mekh. Zhi. Gaza, 2, 43-51, 1967. English translation in Fluid dynamics, Faraday Press, N.Y., 2, 29-34, 1970.
[4] Uma B. And Usha R., Dynamics of a thin viscoelastic film on an inclined plane, International Journal of Engineering Science, 44, 1449-1481, 2006.
[5] Amatousse N., Ait Abderrahmane H., Mehidi N., Traveling waves on a falling weakly viscoelastic fluid film, Int. J. Eng. Science, 54, 27-41, 2012.